являются конгруэнции пары дополнительных конгруэнций $\{F_1 F_2\}$ и $\{F_1' F_2'\}$ и постоянно произведение абсцисс фокусов конгруэнций данной пары. К системе уравнений (I) надо присоединить уравнения:

$$\rho_1\rho_2 \sin^2(\alpha_1-\alpha_2)+(h_1-h_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)=0,\quad \rho_1\rho_2=\rho_1'\rho_2'=\mathrm{const}. \qquad (5)$$

После дифференцирования уравнений (5) и использования уравнений системы (I) имеем уравнение

$$H_1-H_2=(A_1-A_2)\frac{1+\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)}{\cos(\alpha_1-\alpha_2)}\ . \qquad (6)$$

Такие пары определяются системой уравнений (I), (5), (6). Произвол существования таких пар конгруэнций - две функции одного аргумента.

Т е о р е м а 6. Пары T_p конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями и постоянным произведением абсцисс фокусов есть пары с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в уравнение (6) выражения $H_\alpha=A_\alpha$ из системы уравнений (I), получим: $A_1-A_2=0$. Следовательно, $H_1-H_2=0$, откуда вытекает, что пара T_p конгруэнций есть пара $\widetilde{T}$ (с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми).

Т е о р е м а 7. Пары T_p конгруэнций с нормальными дополнительными конгруэнциями и постоянным произведением абсцисс фокусов образованы нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 6 следует, что рассматриваемые пары есть пары $\widetilde{T}$ конгруэнций. Так как $\rho_1\rho_2=\mathrm{const}$, то из теоремы 2 [2, с.79] следует заключение теоремы.

Библиографический список

I. Р е д о з у б о в а О.С. Основы метрической теории пар Т конгруэнций / МГПИ им.В.И.Ленина. Деп. в ВИНИТИ. № 2993. I980.

2. Р е д о з у б о в а О.С. Пары Т конгруэнций, соответствующие прямые которых проходят через фокусы прямых конгруэнции общих перпендикуляров // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I992. Вып.23. С.77-8I.

3. Р е д о з у б о в а О.С. Пары Т конгруэнций с данным расположением конгруэнции общих перпендикуляров // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I990. Вып.2I. С.86-89.

УДК 5I4.77 ; 530.I2

О ЗАМКНУТЫХ ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ

С.Е.С т е п а н о в

(Владимирский государственный педагогический университет)

Данная статья является продолжением работы автора [I]. В ней мы уточним ряд уже полученных результатов, а также укажем условия препятствия к некоторым локальным (3 + I) - расщеплениям пространства-времени. Вдохновляющим моментом для нас послужила формулировка ставшей уже классической теоремы С.Хокинга [2, с.I64], которая выражает условия препятствия к локальному (3 + I) - расщеплению пространства-времени с замкнутыми, т.е. компактными без границ, пространственноподобными гиперповерхностями.

I. Пусть M - четырехмерное многообразие с метрикой g лоренцевой сигнатуры (- + + +), ориентируемое и ориентируемое во времени. Рассмотрим в M область U, границей которой служит замкнутая пространственноподобная гиперповерхность H. Зададим на H направленное в будущее времениподобное единичное векторное поле n. Тогда произвольное векторное поле X многообразия M в точках H можно разложить $X=X_\perp+X_\parallel$ на касательную $X_\perp=X+g(X,n)n$ и нормальную $X_\parallel=-g(X,n)n$ составляющие. И если Ω - метрическая форма объема M, то вдоль H будем иметь $\Omega(X)=-g(X,n)\overline{\Omega}$. Здесь $\overline{\Omega}$ - форма объема H, определяемая из равенства $\overline{\Omega}(A,B,C)=\Omega(n,A,B,C)$ для любых локальных линейно независимых векторных полей A,B и C, касательных H. В этом случае теореме Гаусса [3, с.I93], [4, с.I83-I84] можно придать следующий вид:

$$\int_U div X\Omega = -\int_H g(X,n)\overline{\Omega}. \qquad (1)$$

Примем во внимание, что ориентированное во времени лоренцево многообразие M традиционно называют пространством-временем.

Рассмотрим модель [5, с.380], в которой за вещество Вселенной берется "космологическая жидкость" ("жидкость", состоящая из галактик), движущаяся через пространство-время M с единичной скоростью так, что линиями тока жидкости являются интегральные кривые векторного поля ξ, образованного ее времениподобными единичными касательными векторами. Тогда для $X = \dot{\xi} - \theta\xi$, где $\dot{\xi} = \nabla_\xi \xi$ – ускорение "жидкости" и $\theta = div\,\xi$ – "расширение жидких мировых линий", будем иметь [1]:

$$div X = Ric(\xi,\xi) - |\omega|^2 + |\sigma|^2 - \frac{2}{3}\theta^2. \qquad (2)$$

Здесь $Ric(\cdot,\cdot)$ – тензор Риччи, ω – "вращательная 2-форма жидкости" и σ –"тензор сдвига жидкости" [5, с.219] такие, что

$$|\omega|^2 = g(\omega,\omega) \geqslant 0, \quad |\sigma|^2 = g(\sigma,\sigma) \geqslant 0.$$

Будем полагать также поле ξ ортогональным H, а потому

$$g(X,n) = g(\dot{\xi} - \theta\xi, n) = div\, n. \qquad (3)$$

С учетом равенств (2) и (3) интегральной формуле (I) придадим следующий вид:

$$\int_U (Ric(\xi,\xi) - |\omega|^2 + |\sigma|^2 - \frac{2}{3}\theta^2)\Omega = -\int_H div\, n\overline{\Omega}. \qquad (4)$$

Если течение "космологической жидкости" в области U безвихревое $(\omega = 0)$ с нулевым расширением $(\theta = 0)$, то интегральная формула (4) перепишется так:

$$\int_U Ric(\xi,\xi)\Omega + \int_U |\sigma|^2\Omega = -\int_H div\, n\overline{\Omega}. \qquad (5)$$

Теперь очевидно, что требования $\int_U Ric(\xi,\xi)\Omega > 0$ и $\int_H div\, n\overline{\Omega} > 0$ являются взаимоисключающими. Справедлива следующая

Т е о р е м а I. Следующие требования на ориентируемое пространство-время несовместимы:

(Iа) Существует область U с замкнутой пространственноподобной границей H.

(Iб) Для единичного направленного в будущее векторного поля n нормалей гиперповерхности H справедливо неравенство

$$\int_H div\, n\overline{\Omega} > 0.$$

(Iв) Для каждого времениподобного векторного поля ξ в области U справедливо неравенство $\int_U Ric(\xi,\xi)\Omega > 0$.

(Iг) Движение "космологической жидкости" в области U безвихревое с нулевым расширением жидких мировых линий, которые ортогонально пересекают H.

Аналогичным образом доказывается

Т е о р е м а 2. Следующие требования на ориентируемое пространство-время несовместимы:

(2а) Существует область U с замкнутой пространственноподобной границей H.

(2б) Для единичного направленного в будущее векторного поля n нормалей гиперповерхности H справедливо неравенство

$$\int_H div\, n\overline{\Omega} < 0.$$

(2в) Для каждого времениподобного векторного поля ξ в области U справедливо неравенство $\int_U Ric(\xi,\xi)\Omega < 0$.

(2г) Движение "космологической жидкости" в области U бессдвиговое, а ее жидкие мировые линии ортогонально перекают H.

2. Полагаем, что в некоторой своей области U ориентируемое пространство-время M допускает (3 + I) – расщепление, т.е. расслоение на пространственноподобные гиперповерхности, такие, что мировые линии ортогональны каждой такой гиперповерхности. Тогда в рассматриваемой области U вихревых движений жидкости не будет [1], [5, с.162], а потому в точках области $\omega = 0$. Предположим, что одна из таких гиперповерхностей является замкнутой. Обозначим ее через H. Поскольку $g(\xi,\xi) = -1$, то $g(\dot{\xi},\xi) = 0$ и, следовательно, в точках H векторы поля $\dot{\xi}$ будут касаться H. Согласно Яно [6, с.44-45]:

$$div\,\dot{\xi} = Ric(\xi,\xi) + trace\,(\nabla\xi)^2 + \nabla_\xi\theta. \qquad (6)$$

Примем во внимание ортогональное разложение ковариантной производной поля 4-скоростей [5, с.219] $g(\nabla_X\xi, Y) = \omega(Y,X) + \sigma(Y,X) + \frac{1}{3}\theta g(hY,hX) - g(\dot{\xi},Y)\,g(\xi,X)$, где согласно предположению $\omega = 0$. Тогда равенству (6) можно придать следующий вид:

$$div X = Ric(\xi,\xi) + |\sigma|^2 + \frac{1}{3}\theta^2 + \nabla_\xi\theta.$$

Поскольку $\partial H = \varnothing$, то на основании теоремы Гаусса будем иметь

$$\int_H \left(Ric(\xi,\xi) + |\sigma|^2 + \frac{1}{3}\theta^2 + \nabla_\xi \theta\right)\overline{\Omega} = 0.$$

Если $\nabla_\xi \theta = 0$ и хотя бы в одной точке гиперповерхности H справедливо неравенство $\theta \neq 0$, то требование $Ric(\xi,\xi) \geq 0$ вступит в противоречие со сделанными предположениями. При этом заметим, что в случае, когда $\theta = 0$ во всех точках пространственноподобной гиперповерхности, последняя будет максимальной [5, с.I83],[7, с.I5], т.е. гиперповерхностью, на которой функционал объема имеет экстремум. А в результате справедлива

Т е о р е м а 3. Следующие требования на ориентированное пространство-время несовместимы:

(3а) Существует область U, допускающая (3 + I) - расщепление с замкнутой пространственноподобной немаксимальной гиперповерхностью.

(3б) Средние кривизны гиперповерхностей вдоль каждой из пересекающих их жидких мировых линий равны.

(3в) $Ric(t,t) \geq 0$ для каждого времениподобного вектора t в области U.

Если требование (3в) теоремы выполняется для любого времениподобного вектора M, то говорят [2, с.I64], что пространство-время M подчинено "энергетическому условию". Этому требованию подчиняются все разумные с физической точки зрения модели Вселенной. На этом основании за очевидностью требование (3в) можно снять.

Случай с максимальной замкнутой гиперповерхностью описывает

С л е д с т в и е. Если времениподобная кривизна Риччи в каждой точке области ориентированного пространства-времени положительна, то любое (3 + I) -расщепление этой области на максимальные пространственноподобные гиперповерхности не содержит ни одной замкнутой.

3. При идеализированном описании релятивистской жидкости тензор энергии-импульса T при наличии динамической η и объемной μ вязкостей, а также потока тепла с 4-вектором q имеет вид [5, с.220]:

$$T = \rho\,\xi\otimes\xi + (p+\mu\theta)h - 2\eta\sigma + q\otimes\xi + \xi\otimes q.$$

Здесь ρ - плотность энергии, p - давление и h - проекционный тензор. Вследствии этого из уравнения Эйнштейна

$$Ric - \frac{1}{2}(\mathrm{trace}\, Ric)g + \lambda g = 8\pi T$$

получаем

$$Ric(\xi,\xi) = 4\pi(\rho + 3p - 3\mu\theta) - \lambda. \qquad (7а)$$

Если же через область U пространства-времени течет "идеальная жидкость" [6, с.380], то

$$Ric(\xi,\xi) = 4\pi(\rho + 3p) - \lambda. \qquad (7б)$$

При этом из уравнения движения "идеальной жидкости" $(\rho + p)\theta = -\nabla_\xi \rho$ для поля ξ, ортогонального пространственноподобной гиперповерхности H, последует

$$(\rho + p)\,\mathrm{div}\, n = -\partial\rho/\partial n, \qquad (8)$$

где

$$\partial\rho/\partial n = g(\mathrm{grad}\,\rho, n).$$

На основании равенств (7а), (7б) и (8) условия препятствия, связанные со знакоопределенностью $\int_U Ric(\xi,\xi)\Omega$ и $\int_H \mathrm{div}\, n\overline{\Omega}$, можно истолковать с точки зрения релятивистской гидродинамики. Так, например, при $\partial\rho/\partial n < 0$ из формулы (5) следует $\int_U Ric(\xi,\xi)\Omega < 0$. Поэтому на основании (7б) соответствующее условие препятствия можно представить в виде

$$\int_U (\rho + 3p)\Omega > \frac{\lambda}{4\pi}\mathrm{Vol}\, U.$$

Если же рассматривать пространство-время с равной нулю космологической постоянной λ, то из (7б) последует $Ric(\xi,\xi) = 4\pi(\rho + 3p) > 0$. А потому (3 + I)-расщепление M вдоль жидких мировых линий поля ξ на ортогональные им максимальные пространственноподобные гиперповерхности не содержит ни одной замкнутой.

Библиографический список

I. С т е п а н о в С.Е. Техника Бохнера и космологические модели // Изв. вузов. Физика. I993. № 6. С.83-87.

2. П е н р о у з Р. Структура пространства-времени. М.: Мир, I972. I83 с.

3. М и з н е р Ч., Т о р н К., У и л е р Дж. Гравитация. М.: Мир, I977. Т.I. 474 с.

4. Ш у т ц Б. Геометрические методы математической физики. М.: Мир, I984. 303 с.

5. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977. Т.2. 525 с.

6. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. 152 с.

7. Шоке-Брюа И. Математические вопросы общей теории относительности // Успехи матем. наук. 1985. Т.40. Вып.6. С.3-39.

Статья написана при поддержке РФФИ, проект № 44-01-01595.

УДК 514.76

ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ОСНАЩЕНИЕМ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

А.В.Столяров

(Чувашский государственный педагогический институт)

В работе под оснащением гиперповерхности V_{n-1} пространства проективной связности $P_{n,n}$ понимается ее одновременное оснащение в смысле Э.Картана [1] и в смысле А.П.Нордена [2] полями геометрических объектов, соответственно, $\{\nu_n^i, \nu_n^0\}$ и $\{\nu_n^i, \nu_i^0\}$; полученные результаты обогащают теорию двойственных пространств аффинной связности, изучаемую автором в работах [3], [4].

Во всей работе индексы принимают следующие значения: $\bar{J},\bar{K},\bar{L} = \overline{0,n}$; $J,K,L,P,Q = \overline{1,n}$; $\bar{i},\bar{j},\bar{k} = \overline{0,n-1}$; $i,j,k = \overline{1,n-1}$.

Рассмотрим пространство $P_{n,n}$ с n-мерной базой B_n и n-мерными центропроективными слоями P_n , определяемое [5] системой $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\omega_{\bar J}^{\bar K}$, удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\omega_{\bar J}^{\bar K} = \omega_{\bar J}^{\bar L}\wedge\omega_{\bar L}^{\bar K} + \frac{1}{2} R^{\bar K}_{\bar J PQ}\,\omega_0^P\wedge\omega_0^Q , \quad \omega_{\bar L}^{\bar L} = 0 .$$

В случае обращения в нуль тензора кривизны-кручения $R^{\bar K}_{\bar J PQ}$ пространство $P_{n,n}$ представляет собой n-мерное проективное пространство P_n .

Дифференциальное уравнение гиперповерхности $V_{n-1}\subset P_{n,n}$ в репере I-го порядка $\{A_{\bar J}\}$ имеет вид:

$$\omega_0^n = 0 , \quad \left(\omega_i^n + \frac{1}{2} R^n_{0ij}\,\omega_0^j\right)\wedge\omega_0^i = 0 .$$

Последовательно продолжая уравнение $\omega_0^n = 0$, имеем:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n\,\omega_0^j ,$$

$$d\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{ik}^n\,\omega_j^k - \Lambda_{kj}^n\,\omega_i^k + \Lambda_{ij}^n\,(\omega_0^0 + \omega_n^n) = \Lambda_{ijk}^n\,\omega_0^k ,$$

. . . .

Совокупность функций Λ_{ij}^n образует тензор (вообще говоря, несимметрический) 2-го порядка.

Рассмотрим регулярную гиперповерхность $V_{n-1}\subset P_{n,n}$, т.е. $\Lambda \overset{def}{=} |\Lambda_{ij}^n| \neq 0$; компоненты тензора Λ_n^{ik} , взаимного тензору Λ_{ij}^n , определяются соотношениями

$$\Lambda_{ij}^n\Lambda_n^{jk} = \Lambda_{ji}^n\,\Lambda_n^{kj} = \delta_i^k .$$

Функция Λ есть относительный инвариант 2-го порядка:

$$d\ln\Lambda + (n+1)(\omega_0^0 + \omega_n^n) = \Lambda_k\omega_0^k , \quad \Lambda_k = \Lambda_n^{ji}\,\Lambda_{ijk}^n .$$

В случае симметрии тензора Λ_{ij}^n совокупность функций

$$\mathcal{D}_{ijk}^n \overset{def}{=} (n+1)\,\Lambda_{ijk}^n - \Lambda_{(ij}^n\Lambda_{k)}$$

образует тензор 3-го порядка (тензор Дарбу).

Предположим, что регулярная гиперповерхность $V_{n-1}\subset P_{n,n}$ оснащена в смысле Э.Картана [1] полем геометрического объекта $\{\nu_n^i, \nu_n^0\}$:

$$d\nu_n^i + \nu_n^j\,\omega_j^i - \nu_n^i\,\omega_n^n + \omega_n^i = \nu_{nj}^i\,\omega_0^j ,$$

$$d\nu_n^0 + \nu_n^0\,(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \nu_n^j\,\omega_j^0 + \omega_n^0 = \nu_{nj}^0\,\omega_0^j$$

Согласно работе [1] при таком оснащении V_{n-1} индуцируется пространство прективной связности $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$, которое определяется [6] системой n^2 форм Пфаффа $\overset{1}{\omega}{}_{\bar i}^{\bar j}$:

$$\begin{cases} \overset{1}{\omega}{}_0^i = \omega_0^i , & \overset{1}{\omega}{}_i^j = \omega_i^j - \nu_n^j\,\omega_i^n , \\ \overset{1}{\omega}{}_0^0 = \omega_0^0 , & \overset{1}{\omega}{}_i^0 = \omega_i^0 - \nu_n^0\,\omega_i^n . \end{cases} \qquad (I)$$

Доказано [4], что в случае $\Lambda_{[ij]}^n = 0$ система n^2 форм $\overset{2}{\omega}{}_{\bar i}^{\bar j}$:

$$\begin{cases} \overset{2}{\omega}{}_0^i = \overset{1}{\omega}{}_0^i , \quad \overset{2}{\omega}{}_0^0 = \overset{1}{\omega}{}_0^0 , \quad \overset{2}{\omega}{}_j^i = \overset{1}{\omega}{}_j^i + \frac{1}{n+1}\Lambda_n^{il}\,\mathcal{D}_{ljk}^n\,\omega_0^k , \\ \overset{2}{\omega}{}_j^0 = \overset{1}{\omega}{}_j^0 + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\Lambda_n^{tl}\Lambda_t\,\mathcal{D}_{ljk}^n + \mathcal{D}_{sjk}^n\,\nu_n^s\right)\omega_0^k \end{cases} \qquad (2)$$

удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [7], а следовательно, определяет пространство проективной связности $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$; при этом преобразование J_k форм связности по закону (2) является инволютивным, т.е. $J_k \equiv J_k^{-1}$, а следовательно, пространства $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ и $\overset{2}{P}_{n-1,n-1}$ являются двойственными [4] относительно J_k .

Если в пространстве $\overset{1}{P}_{n-1,n-1}$ задано поле ковектора $\nu_{\bar i}^0$

7 Зак. 1296